ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES
ECOLE CENTRALE DE LYON

ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE
ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

Concours d'Admission 1974

Quatre pages dactylographiées

SUJET OPTION M

MATHEMATIQUES I

La partie III peut être traitée indépendamment des parties I et II

1ère PARTIE

On considère la matrice à éléments dans le corps $\mathbb{C}$ *des nombres complexes*

$$H = \begin{bmatrix} c & o & b & a \\ o & c & -a' & b' \\ b' & -a & -c & o \\ a' & b & o & -c \end{bmatrix}$$

où a, b, a', b' *et* c *sont des nombres complexes donnés, tels que* $aa' + bb' \neq o$

I.1. Calculer H^2 *et det H. Etudier le rang de* H.

I.2. Montrer que les valeurs propres de H *sont les racines carrées du nombre complexe* $aa' + bb' + c^2$.

Montrer qu'à chacune d'elles correspond un plan de vecteurs propres : si λ *est une valeur propre et si* (x_1, x_2, x_3, x_4) *est un vecteur propre associé, on exprimera chacun des couples* (x_1, x_2) *et* (x_3, x_4) *en fonction de l'autre .*

La matrice H *est-elle diagonalisable ?*

2ème PARTIE

Soit E *l'espace vectoriel sur* $\mathbb{C}$ *dont les éléments sont les applications indéfiniment dérivables d'un ouvert donné de* $\mathbb{R}^4$ *dans* $\mathbb{C}$.

On convient qu'étant donnée la matrice carrée d'ordre 4

$$\mathcal{C} = \left(\tau_{h,k} \right)_{1 \leq h \leq 4,\ 1 \leq k \leq 4}$$

à éléments dans l'ensemble des endomorphismes de E, *l'écriture matricielle*

$$\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{11} \dots \tau_{14} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ \tau_{41} \dots \tau_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}$$

représente l'endomorphisme de E^4 *qui au quadruplet* $(f_k)_{1 \leq k \leq 4}$ *associe le quadruplet* $(g_h)_{1 \leq h \leq 4}$ *défini par*

$$g_h = \tau_{h,1}(f_1) + \tau_{h,2}(f_2) + \tau_{h,3}(f_3) + \tau_{h,4}(f_4)$$

MATHEMATIQUES I

Le point générique de R^4 *étant noté* (x,y,z,t), *on désigne par* ∂_x, ∂_y, ∂_z *et* ∂_t *les endomorphismes de* E *qui à l'application* $f \in E$ *associent respectivement les applications* $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ *et* $\frac{\partial f}{\partial t}$, *dérivées partielles de* f *par rapport aux variables* x,y,z *et* t. *On pose :*

$$\partial_+ = \partial_x + i\partial_y \quad \text{et} \quad \partial_- = \partial_x - i\partial_y ,$$

i désignant le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

SUJET OPTION M

II.1. Etant donné le réel m, *on étudie l'équation :*

$$(1) \qquad \frac{1}{i} \begin{bmatrix} \partial_t & o & -\partial_z & -\partial_+ \\ o & \partial_t & -\partial_- & \partial_z \\ \partial_z & \partial_+ & -\partial_t & o \\ \partial_- & -\partial_z & o & -\partial_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix}$$

dans laquelle l'inconnue est l'élément $(\phi_k)_{1 \leq k \leq 4}$ *de* E^4.

Plus précisément, on recherche les solutions de (1) de la forme :

(2) $\phi_k(x,y,z,t) = C_k \exp\left[i(Et - ux - vy - wz)\right]$

où E, u, v, w *sont des réels fixés, tels que* $u^2 + v^2 + w^2 \neq o$, *et où* (C_1, C_2, C_3, C_4) *est un vecteur non nul de* $\mathbb{C}^4$ *qu'il s'agit de trouver.*

a) Montrer que cette recherche se ramène à celle des vecteurs propres d'une matrice du type étudié dans la première partie.

b) En déduire que (1) n'admet des solutions de la forme (2) que si E, m, u, v, w *vérifient une relation que l'on écrira. Cette condition étant supposée remplie, exprimer* C_3 *et* C_4 *en fonction de* C_1 *et* C_2.

c) Dire comment on obtiendrait, sans nouveau calcul, les solutions de (1) de la forme

(3) $\phi_k(x,y,z,t) = C'_k \exp\left[-i(Et - ux - vy - wz)\right]$,

et exprimer C'_3 *et* C'_4 *en fonction de* C'_1 *et* C'_2

II.2. Peut-on étendre aux matrices $\mathcal{C}$ *la règle de multiplication des matrices à éléments dans un corps commutatif ?*

Calculer $\mathcal{C}^2$ *lorsque* $\mathcal{C}$ *est la matrice qui intervient au premier membre de l'équation (1) du II.1.*

3ème PARTIE

On se limite dorénavant à deux variables. E *est ici l'espace vectoriel sur* $\mathbb{C}$ *dont les éléments sont les applications indéfiniment dérivables d'un ouvert donné de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{C}$; *on suppose que cet ouvert ne contient pas* (o,o) ; $\mathcal{C}$ *est une matrice carrée d'ordre 2, à éléments dans l'ensemble des endomorphismes de* E.

Le point générique de $\mathbb{R}^2$, *considéré comme euclidien, est noté* (x,y). *Au point* (x,y) *on associe le système de coordonnées polaires* (r, θ), *choisi de façon que* $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

On définit ∂_x, ∂_y, ∂_+ *et* ∂_- *comme dans la partie II ; on définit en outre les dérivations* ∂_r *et* ∂_θ.

III.1. Montrer que ∂_+ *et* ∂_- *s'expriment au moyen de* ∂_r, *de* ∂_θ *et des fonctions* r *et* $\exp(i\theta)$.

III.2. Soient α, m *et* E *des réels strictement positifs donnés, tels que* $E < m$; *on pose*

$$A = \sqrt{m + E} \quad , \quad B = \sqrt{m - E}.$$

SUJET OPTION M

On considère l'équation

$$(4) \qquad \begin{bmatrix} o & \partial_- \\ \partial_+ & o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m - E - \frac{\alpha}{r} & o \\ o & -m + E + \frac{\alpha}{r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}$$

dans laquelle l'inconnue est $(f,g) \in E^2$, *et on se propose d'en rechercher des solutions de la forme*

$$(5) \qquad \begin{cases} f = r^{\frac{1}{2}} F(r) \exp(-i(j+1)\theta) \\ g = r^{\frac{1}{2}} G(r) \exp(-ij\theta) \end{cases}$$

où j *est un entier positif donné, et où* F *et* G *sont des fonctions réelles inconnues de la variable réelle* r.

a) Montrer que l'on est ramené à résoudre le système différentiel

$$(6) \qquad \begin{cases} \frac{dG}{dr} - (j - \frac{1}{2}) \frac{G}{r} + (A^2 + \frac{\alpha}{r}) F = o \\ \frac{dF}{dr} + (j + \frac{3}{2}) \frac{F}{r} + (B^2 - \frac{\alpha}{r}) G = o \end{cases}$$

b) On cherche plus précisément des solutions de (4) de la forme (5), avec :

$$(7) \qquad \begin{cases} F(r) = \exp(-ABr)(a_0 + a_1 r + \ldots + a_q r^q + \ldots + a_p r^p) r^\gamma \\ G(r) = \exp(-ABr)(b_0 + b_1 r + \ldots + b_q r^q + \ldots + b_p r^p) r^\gamma \end{cases}$$

relations dans lesquelles p *désigne un entier naturel donné.*

On impose en outre les conditions :

(i) $L'élément\ (a_0, b_0)$ *de* $\mathbb{R}^2$ *est différent de* (o, o),

(ii) $L'intégrale \int_o^{+\infty} r \left(F^2(r) + G^2(r)\right) dr$ *est finie.*

Montrer que, sous réserve que α *soit assez petit, il existe une et une seule valeur acceptable de* γ, *et exprimer cette valeur en fonction de* α *et de* j.

c) Ayant donné à γ *la valeur obtenue en b), on substitue dans (6) à* F *et* G *leurs expressions (7). On obtient ainsi deux relations de récurrence faisant intervenir* a_q, b_q, a_{q+1}, b_{q+1}, $(q \geqslant o)$. *Les écrire.*

En déduire qu'il existe deux fonctions affines, K et K', telles que

$$a_q \cdot K'(q) = b_q \cdot K(q),$$

ce qui permet de poser

$$a_q = C_q \cdot K(q) \text{ et } b_q = C_q \cdot K'(q)$$

Montrer qu'il existe une fraction rationnelle R, n'admettant aucun pôle positif telle que

$$C_{q+1} = C_q \cdot R(q)$$

d) *En utilisant la condition $a_{p+1} = b_{p+1} = o$, conclure de cette étude que le problème a des solutions, dans la mesure où les données α, m, E, j et p vérifient la condition :*

$$(8) \qquad E = m \left[1 + \frac{\alpha^2}{\left(p + \sqrt{(j + \frac{1}{2})^2 - \alpha^2} \right)^2} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

II.3. *On considère ici que m, j et p sont fixés et que (8) détermine une fonction E de la variable α^2 qui décrit un voisinage de o. Ecrire un développement limité de E jusqu'au terme en α^4 inclus ; en posant,*

$$n = p + j + \frac{1}{2},$$

on calculera S et T en fonction de m, j et p de façon que

$$E = m + S \frac{\alpha^2}{n^2} + T \frac{\alpha^4}{n^4} + o(\alpha^4)$$

F I N

SUJET OPTION M

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail